

斜坡模型演化方程的控制变量分析^{*}

段宏飞¹, 顾华雄², 湛铠瑜³, 赵丽娟¹

(1. 中国矿业大学 资源与地球科学学院, 江苏 徐州 221008; 2. 上海地矿工程勘察有限公司, 上海 200072; 3. 中煤国际工程集团重庆设计研究院 重庆 400016)

摘 要: 斜坡稳定性是工程地质研究中的重点内容, 常用的极限刚体平衡法难以考虑斜坡失稳机制中的非线性滑动特征, 通过对斜坡模型演化方程控制变量的分析, 结合运动方程, 从系统结构上揭示了斜坡演化丰富的非线性动力学特征。研究表明: 用奇异性理论根据斜坡演化的幅频响应特性, 能够分析斜坡演化分叉现象; 转迁集中的分叉点集构成的恰好是尖点突变的形式, 充分揭示了斜坡失稳是内部结构变化与外部因素力量作用共同演化的结果。

关键词: 幅频响应特性; 分叉点集; 尖点突变

中图分类号: P642. 2; TU 432

文献标识码: A

文章编号: 1005-3409(2010)03-0277-04

Control Variables Analysis of Evolution Equation of Slope Model

DUAN Hong-fei¹, GU Hua-xiong², ZHAN Kai-yu³, ZHAO Li-juan¹

(1. School of Resources and Geoscience, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China; 2. Geological Engineering Investigation Co. LTD, Shanghai 200072, China; 3. SINO-COAL International Engineering Group, Chongqing Design & Research Institute, Chongqing 400016, China)

Abstract: Slope stability is the key study content of engineering geological, rigid body limit equilibrium method cannot consider nonlinear sliding characteristics of slope instability mechanism. Based on the control variables analysis of evolution equation of slope model, the paper reveals the rich nonlinear dynamical feature of evolution of slope combining motion equation. According to the amplitude-frequency response characteristics of evolution, its bifurcation phenomena with singularity theory was discussed. It fully revealed the slope instability which is the internal structure and external factors force coevolution of results.

Key words: amplitude frequency response characteristics; bifurcation point set; sharp point mutations

斜坡稳定性是工程地质学研究中的重点内容, 很多学者作出了巨大的努力和探索。但世界上很多斜坡所带来的灾难说明我们对斜坡失稳机制仍需进行进一步深入研究。在斜坡稳定性分析中常用的极限刚体平衡法, 一个显著的不足就是不能考虑斜坡的非线性滑动机制。非线性动力学系统(NDS)理论的概念和数学技术, 在岩石力学和地质研究的很多方面已经得到广泛应用。NDS 理论在斜坡研究中的应用给我们提供了一个很好的对斜坡机制研究做深入洞察的机会。

斜坡的演化是非线性的开放系统, 它不断与周围环境进行着物质和能量交换。同时斜坡演化是一个渐变过程, 系统内部的相互作用与外部因素影响不断发生变化。胡广韬^[5]等在从事多年斜坡动力学

研究和实践的基础上提出了斜坡动力学说; 秦四清^[2]提出了斜坡失稳的非线性动力学模型。

本文通过对斜坡模型演化方程的控制变量的分析, 结合运动方程, 从系统结构上揭示了斜坡演化丰富的非线性动力学特征。

1 斜坡平面滑动模型

考虑斜坡的如图 1 所示, 斜坡上端已出现拉裂, 破裂面为 ABC, 滑体质量为 M。在斜坡演化过程中, 外力是不断变化的, 在某一点保持动态平衡。在 Δt 时段内, 设 k 为时刻 t_i 的广义刚度系数; u 为时刻 t_i 的广义阻尼系数, 在这里主要由滑体与滑床之间的摩擦力提供; 滑体的滑动位移, 简化模型如图 2 所示。

* 收稿日期: 2009-11-22

作者简介: 段宏飞(1983-), 男, 山西大同人, 硕士研究生, 从事地质工程与岩土工程研究。E-mail: dhfcumt9@126.com

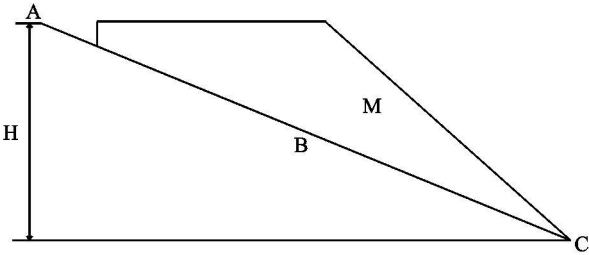


图 1 斜坡示意图

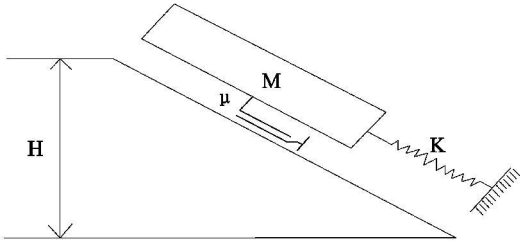


图 2 斜坡模型示意图

此时滑体的广义形变力为

$$S=Ku \tag{1}$$

系统的形变动态平衡微分方程为

$$Mu''+Mu'+S=P \tag{2}$$

把式(1)带入式(2)有

$$Mu''+Mu'+Ku=P \tag{3}$$

式中: P ——系统的外部荷载。

随着斜坡演化不断进行,使系统处在不断的调整之中,特性也在不断的发生变化,考虑外部荷载是周期变化的,式(3)可变为

$$u''+\delta u'+\Omega u=F\cos\omega_0t \tag{4}$$

其中, $\delta=\eta/M$, $\Omega=K/M$, $\omega_0^2=F/M$; δ 和 Ω 定义为系统的阻尼和刚度, ω_0 为自然频率, F 为系统外部因素周期性影响因子的振幅。

为突出系统的本质特征,首先考察到式(4)中 $F=0$ 时的特征方程:

$$\lambda^2+\delta\lambda+\Omega=0 \tag{5}$$

此时,对应的演化状态方程为($u_1=u$, $u_1'=u_2$)为

$$\begin{cases} u_1'=u_2 \\ u_2'=-\delta u_2-cu_1 \end{cases} \tag{6}$$

$$\text{取} \quad \delta^2-4\Omega=D \tag{7}$$

可以根据参数 D , δ , Ω 来考虑式(7)所代表的系统平衡点类型:当 $D>0$, $\Omega<0$,为鞍点,这种平衡点是不稳定(称为排斥子); $\delta>0$ 时,对应的焦点和结点是稳定的,称为吸引子; $\delta<0$ 时,对应不稳定的焦点和结点(排斥子)。因此系统的不稳定原因有两种:(1)系统的有效刚度(运动方程的零阶项系数)由正变负引起;(2)系统的有效阻尼(运动方程的一阶系数)由正变负引起。

2 非线性滑动分析

斜坡的演化是非线性的开放系统,系统内部的相互作用与外部因素影响不断发生变化。非线性控制量主要体现斜坡体刚度系数与阻尼系数的非线性变化上。

刚度系数与斜坡滑体组成物质的特性联系在一起,由于人为因素和天然因素的影响,随着时间的变化,刚度系数是非线性变化着。在滑体本构方程上主要体现为应力应变曲线的非线性变化。阻尼系数的非线性主要体现为滑面上摩擦性质的非线性变化。滑面上的摩擦函数通常是滑体运动的速度以及滑体的滑动位移的函数。一旦作用在滑体上的外力达到最大静摩擦力,滑体就开始运动,静摩擦随之变成动摩擦。静摩擦和动摩擦之间的切换则通常是突变式的。静摩擦和动摩擦之差是非线性的。刚度系数与阻尼系数的非线性导致了斜坡的演化有很复杂的行为,是导致其演化出现混沌的重要因素。

此时式(4)可描述为Vanderpol-Duffing系统的动力方程:

$$u''+\delta u'+\Omega u+\alpha u^3+\alpha_1(1-u^2)u'=F\cos\omega t \tag{8}$$

式中: Ω , δ ——系统的固有刚度、阻尼; α , α_1 ——非线性系数; F , ω ——表示外激励幅值与频率。记 $2n=\delta+\alpha_1$ 。因此,在方程中 δ , α_1 对应于系统的线性与非线性耗散项; F 对应于周期强迫力的振幅; Ω , α 则为吸引域的控制参数,其中 α_1 是决定斜坡非线性系统的吸引域的结构参数。这些参数反映了对斜坡演化具有重大影响的三个本质方面:内部耗散,外部营力的影响,内部势结构的变化,这三者的竞争、协调作用产生了十分丰富而又复杂的动力学行为。这也是造成斜坡失稳难以预测的原因。因此研究式(5)各种参量的变化以及简化形式,对于揭示斜坡演化并为失稳预报提供依据。

对于斜坡演化来说一般是需要相对漫长的时间的,在局部时间段内视为弱非线性系统,应用平均法,考虑系统的一次谐波解:

$$u=h\cos\omega t+v\sin\omega t \tag{9}$$

$$\begin{cases} h'\cos\omega t+v'\sin\omega t=0 \\ -h'\omega\sin\omega t+v'\omega\cos\omega t=f(h,v,t) \end{cases} \tag{10}$$

其中:

$$\begin{aligned} f(h,v,t)= & F\cos\omega t-\alpha(h\cos\omega t+v\sin\omega t)^3- \\ & 2n(-h\omega\sin\omega t+v\sin\omega t)-\Omega(h\cos\omega t+v\sin\omega t)+ \\ & \alpha_1(h\cos\omega t+v\sin\omega t)^2(-h\omega\sin\omega t+v\cos\omega t) \end{aligned}$$

由式(10)得:

$$\begin{cases} h' = -\frac{1}{\omega}f(h, v, t)\sin\omega t \\ v' = -\frac{1}{\omega}f(h, v, t)\cos\omega t \end{cases} \quad (11)$$

对在式(11) $[0, 2\pi]$ 内进行平均, 得:

$$\begin{cases} u' = -nh + \frac{\Omega}{2\omega}v + \frac{3a_0}{8\omega}(h^2 + v^2)v \\ \quad + \frac{a_1}{8}(h^2 + v^2)u \\ v' = -\frac{\Omega}{2\omega}h - nv - \frac{3a_0}{8\omega}(h^2 + v^2)u \\ \quad + \frac{a_1}{8}(h^2 + v^2)v + \frac{F}{2\omega} \end{cases} \quad (12)$$

令 $r = \sqrt{h^2 + v^2}$, $\varphi = \arctg \frac{v}{h}$, 可以得到关于振幅 r 和相位 φ 的方程:

$$\begin{cases} r' = -nr + \frac{a_1}{8}r^3 + \frac{F}{2\omega}\sin\varphi \\ r\varphi' = -\frac{\Omega}{2\omega} - \frac{3a_0}{8\omega}r^3 + \frac{F}{2\omega}\cos\varphi \end{cases} \quad (13)$$

幅频得响应方程:

$$\frac{F^2}{4\omega^2} = (nr - \frac{a_1}{8}r^3)^2 + r^2(\frac{\Omega}{2\omega} + \frac{3a_0}{8\omega}r^2)^2 \quad (14)$$

图 3 给出了不同幅值在外部激励频率变化时的变化规律。从图上可看出, 幅频响应具有明显的跳跃与滞后现象。这正好可以用来解释斜坡失稳大规模并不是发生在暴雨强度最大的时候, 而是发生在雨峰后的数小时之内^[7]。应用奇异性理论研究系统平均方程(12)的静态分叉现象, 令:

$$\begin{aligned} y &= r^2 \\ c_0 &= \frac{16F^2}{9\omega^2} \\ c_1 &= \frac{16}{9\omega^2}(4\omega^2n^2 + \Omega^2) \\ c_2 &= \frac{24a_0\Omega - 16a_1\omega^2n}{9\omega^2} \\ c_3 &= 1 + \frac{a_1^2\omega^2}{9\omega^2} \end{aligned}$$

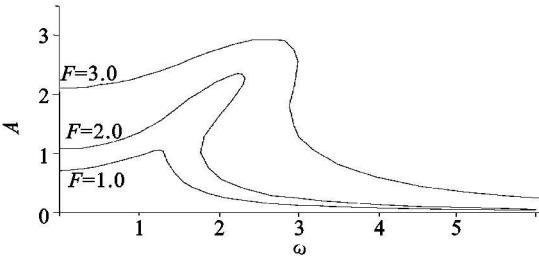


图 3 $A-\omega$ 关系曲线

式(14)为:

$$c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } x &= y + \frac{c_2}{3c_3}: \\ x^3 - \lambda^2x + \alpha + \beta x &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -\frac{c_0}{c_3} \\ \alpha &= \frac{2}{27}(\frac{c_2}{c_3})^3 - \frac{c_1c_2}{3c_3^2} \\ \beta &= \frac{c_1}{c_3} - \frac{1}{3}(\frac{c_2}{c_3})^2 \end{aligned}$$

取双翼尖点 $g(x, \lambda) = x^3 - \lambda^2x$ 为芽。由静态分叉的奇异性理论^[6]可以证明:

$$G_1(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = x^3 - \lambda^2x + \alpha + \beta x + \gamma\lambda x \quad (17)$$

为 $g(x, \lambda)$ 的普适开折。对比式(16)与式(17)可知 $G(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda^2x + \alpha + \beta x$ 为 $g(x, \lambda)$ 的一个开折, 此处 V anderpol- Duffing 方程的振幅方程参数由系统确定, γ 开折项不出现在 G 中。

G 的转迁集:

$$\Sigma = B \cup H \cup D$$

其中, 分叉点集:

$$B = \{(\frac{\beta}{3})^3 + (\frac{\alpha}{2})^2 = 0\}$$

滞后点集:

$$H = \{\beta = 0; \alpha \geq 0\}$$

双极限点集:

$$D = \varphi$$

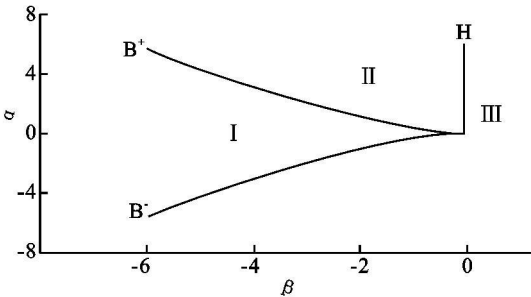


图 4 转迁集

转迁集 Σ 将 $\alpha-\beta$ 参数平面划分为三个具有扰动不变性的区域(图 4), 由于开折参数 α 和 β 分别由系统参数 a_0 和 b_0 所确定, 因而区域 I 是不可实现的。由奇异性理论可知, 在同一参数区域内, 任意两分叉图都是等价的; 任意两个不同参数区域内的分叉图都是不等价的; 在 Σ 上的分叉图是结构不稳定的。

3 分析与结论

(1) 式(16)分叉点集对应的是变为尖点突变的标准形式:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (18)$$

式中取 $a = \beta$, $b = \alpha$, 式(18)的分叉集方程为

$$D = 4\beta^3 + 27\alpha^2 = 4a^3 + 27b^2 \quad (19)$$

如图 5, 三维空间的坐标分别为控制参数 a, b 和状态变量 x 。例如, 从 B 点出发, 随着控制参数的连续变化, 系统状态沿路径 B 演化到 B' , 状态变量连续变化, 不发生突变 ($D > 0$); 而从 A 点出发沿路径 AA' 演化, 当接近折叠翼边缘时, 只要控制参数有微小的变化, 系统状态就会发生突变, 从折叠翼的下叶跃迁到折叠翼的上叶。这说明系统只有在跨越分叉集时, 才能发生突变, 因此式(18)即为平面滑动型斜坡突发失稳的充要力学条件判据。

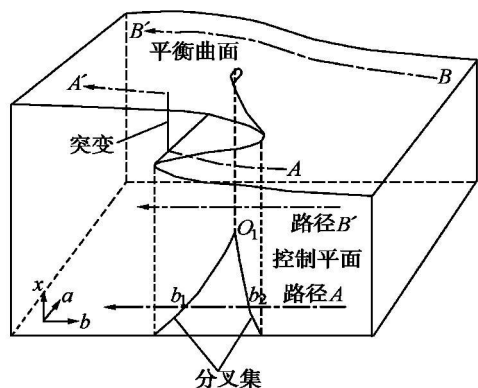


图 5 尖点突变模型

(2) 斜坡整体结构中的岩土体类型和性质、岩体结构和地质构造、地形地貌、水的作用、地震影响以及人为因素等组成了复杂的非线性系统框架。系统的结构在变化(或演化)过程中起着主要作用。非线性运动方程中的 $\alpha_0, \alpha_1, \delta$ 代表了这系统结构的非线性程度。在这个简单的模型中, $\alpha_0, \alpha_1, \delta$ 的变化主要影响着系统向突变以及混沌方向的演化, 也就是说系统的结构在演化过程中起着主要作用。对斜坡来说, 人为地破坏其结构组成是造成斜坡失稳的主性

要因素之一, 其它自然营力的破坏也是以损坏斜坡系统的结构为前提, 进而影响系统的整体稳定。

(3) 不同结构的系统组成了不同演化过程和演化形式, 而且在这个过程中通过调整结构组成, 可以改变系统的演替方向。当控制参量的变化时, 就会得到不同的演化结果。斜坡系统是由岩土体性质、地质构造、地质地貌、水的作用以及人为因素等组成的复合系统, 内部各部分之间存在着相互制约的内在作用, 这种作用是非线性的。而各部分之间又有其自身的结构和功能因子, 每个因子的变化不仅影响其本身的稳定, 也波及整个斜坡系统的演化。如斜坡岩土体中的水分含量影响了岩土体本身的结构和功能, 进而影响斜坡系统的整体演化。斜坡在水蚀作用下的失稳就是最好的例证, 此外系统各部分的稳定性除取决于本身的结构外, 与各控制因子的参变量变化有着极为敏感的响应, 当各种干扰超过其阈值时, 系统也将失稳。

参考文献:

- [1] 许磊, 陆明万, 曹庆杰. Vanderpol-Duffing 方程的非线性动力学分叉特性研究[J]. 应用力学学报, 2000, 19(4): 130-133.
- [2] 秦四清. 斜坡失稳的突变模型与混沌机制[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(4): 486-492.
- [3] 秦四清. 初论岩体失稳过程中耗散结构的形成机制[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(3): 265-269.
- [4] 王来贵, 黄润秋, 王泳嘉, 等. 岩石力学系统运动稳定性理论及其应用[M]. 北京: 地质出版社, 1998.
- [5] 胡广韬. 斜坡动力学[M]. 北京: 地质出版社, 1995.
- [6] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论[M]. 上海: 教育出版社, 1993.
- [7] 村田重之. 暴雨对陡坡崩塌的影响[J]. 水土保持科技情报, 1991(2): 33-37.