

基于滑楔法的边坡稳定可靠性分析

胡爱国, 汪家林, 徐湘涛

(成都理工大学 地质灾害防治与环境保护国家专业实验室, 成都 610059)

摘 要: 使用滑楔法建立了边坡极限状态的功能函数, 用中心差商近似代替对功能函数的数学求导, 运用一次二阶矩法计算可靠性指标和失效概率, 并使用蒙特卡洛法进行可靠性指标校核, 算例计算结果表明可靠性指标对土条侧向力倾角的假定是敏感的, 可靠性指标对软弱层的内摩擦角敏感性大于软弱层的内聚力和坡体重度。  
关键词: 边坡; 滑楔法; 可靠性指标; 一次二阶矩法; 蒙特卡洛法  
中图分类号: P642. 2; T U 413. 62 文献标识码: A 文章编号: 1005-3409(2007)06-0195-03

Reliability Analysis of the Slope Stability Based on Wedge Method

HU Ai-Guo, WANG Jia-Lin, XU Xiang-Tao

(National Laboratory of Geological Hazard Prevention & Geological Environment Protection,  
Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: The limit state equation is built based on the wedge method. The central difference of numerical differential is used to approximately substitute the derivative of the limit state equation. The index of reliability degree and failure probability are worked out by FOSM and are checked by the Monte Carlo Method. The example result shows that the index of reliability degree is sensitive about the direction of the interslice force, and is more sensitive about the friction angle of the weak layer than the cohesion force of the weak layer and unit weight of the slope.  
Key words: slope; wedge method; index of reliability degree; FOSM; Monte Carlo Method

在边坡的稳定性评价和工程设计中, 当边坡中存在明显软弱夹层和滑面时, 常采用滑楔法进行评价和设计。对于在分析过程中存在的岩土参数等不确定因素考虑较少, 认识这些不确定因素对边坡稳定性的影响, 可以提高边坡评价和设计水平。一般来说边坡稳定分析极限状态函数是非线性的, 状态函数随机变量的联合分布概率函数是不易得到的, 常采用一次二阶矩法(FOSM)和蒙特卡洛法(Monte Carlo Method)等进行边坡稳定可靠性分析。

1 滑楔法简介

该方法适合任意形状的滑面, 对于多余未知力的处理是通过假定土条侧向力的倾角来减少多余未知力, 主要有以下 4 种方法: (1) 陆军工程师团法。假定土条侧向力的倾角为常数, 等于平均坡度。(2) 罗厄法。假定土条侧向力的倾角等于底面倾角和顶面倾角的平均值。(3) 简化的 Janbu 法。假定土条侧向力的倾角等于 0。(4) 传递系数法。假定土条侧向力的倾角等于该土条底面的倾角。

滑楔法要求每一土条和整个坡体都要满足力的平衡, 但力矩平衡不满足。

使用滑楔法计算安全系数时, 首先假定一个安全系数从右端(边坡的倾向向左)第一个土条开始, 通过静力平衡求出土条左侧抗滑力, 直到最后一个土条, 最后一个土条的左侧抗滑力应为 0, 如果不为 0, 则表示不闭合, 要重新假定值进行计算, 直到闭合条件满足为止。

计算左侧抗滑力的公式:

$$P_i = \sec(\varphi_{ci} - \theta_i + \omega_i) [P_{i-1} \cos(\varphi_a - \theta_i + \omega_{i-1} -$$

$$(W_i \pm V_i) \sin(\varphi_{ci} - \theta_i) + u_i \sec\theta_i \sin\varphi_a \Delta x - c'_a \cdot \sec\theta_i \cos\varphi_{ci} \Delta x + Q \cos(\varphi_a - \theta_i)]$$
$$c'_a = \frac{c'}{K}$$
$$\tan \varphi_{ci} = \frac{\tan \varphi}{K} \tag{1}$$

式中:  $P_i$ ——土条一侧的抗滑力;  $P_{i-1}$ ——土条另一侧的下滑力;  $W_i$ ——土条的重量;  $u_i$ ——作用于土条底部的孔隙压力;  $Q_i$ ,  $V_i$ ——分别为水平和垂直地震惯性力(向上为正, 向下为负);  $\theta_i$ ——土条底面与水平面的夹角;  $\omega_i$ ——土条一侧的  $P_i$  与水平面的夹角;  $\omega_{i-1}$ ——土条一侧的  $P_{i-1}$  与水平面的夹角;  $c'$ ,  $\varphi$ ——土条底面的有效应力抗剪强度指标;  $\Delta x$ ——土条宽度。

2 可靠性分析方法

目前常用的可靠性分析方法主要有二次二阶矩法、随机有限元法、概率矩点估计法(Rosenblueth 法)、蒙特卡洛法等。这里采用一次二阶矩法和蒙特卡洛法进行可靠性分析, 下面对这 2 种方法作简单介绍。

2.1 一次二阶矩法(验算点法)

2.1.1 基本原理

该方法是将功能函数  $G(X) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在验算点  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  用泰勒级数展开, 使之线性化, 然后计算功能函数在验算点  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  的均值和标准差, 因此得到可靠性指标和失效概率。

功能函数在点  $X^*$  展开并略去二阶小量得:

\*收稿日期: 2006-12-15  
作者简介: 胡爱国(1974-), 男, 四川蓬安人, 硕士研究生, 主要从事岩土工程和信息化施工研究。

$$G(X) = G(X^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial G}{\partial x_i} | X^* \quad (2)$$

又  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$  为破坏面 或者极限状态上的一点, 因此有:

$$G(X^*) = 0 \quad (3)$$

将(3) 式代入(2) 式使功能函数简化为

$$G(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial G}{\partial x_i} | X^* \quad (4)$$

则功能函数的均值和标准差为:

$$m_G = \sum_{i=1}^n (m_{x_i} - x_i^*) \frac{\partial G}{\partial x_i} | X^* \quad (5)$$

$$\sigma_G = \left[ \sum_{i=1}^n [\sigma_{x_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} | x^*]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

对线性化为

$$\sigma_G = \sum_{i=1}^n [\alpha_i \sigma_{x_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} | x^*] \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{x_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} | x^*}{\sum_{j=1}^n [\sigma_{x_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} | x^*]^2} \quad (8)$$

式中:  $\alpha_i$  ——敏感系数。

则可因此计算出可靠性指标为

$$\beta = \frac{m_G}{\sigma_G} \quad (9)$$

验算点的坐标为

$$x_i^* = m_{x_i} - \beta \alpha_i \sigma_{x_i} \quad (10)$$

失效概率为

$$P_F = 1 - \Phi(\beta) \quad (11)$$

2.1.2 功能函数

对于使用滑楔法进行边坡稳定分析和设计所遇到最多的随机变量为抗剪强度指标和坡体岩土体的重度, 这里取随机变量的序列为( $c', \phi, \gamma$ ), 3 个随机变量都服从正态分布且相互独立。如果随机变量序列为非正态和统计相关变量, 则可使用当量正态化和正交变换得到服从正态分布且相互独立的随机变量。

当安全系数  $K = 1.0$  时, 最后一个土条抗滑力  $P_n$  能够反映边坡处于极限平衡状态时的形态, 定义功能函数为

$$G(c', \phi, \gamma) = -P_n = 0 \quad (12)$$

当  $G < 0$  时, 表明还有剩余下滑力, 边坡不稳定; 当  $G \geq 0$  时表明有足够的阻滑力, 边坡处于稳定状态。

2.1.3 功能函数的导数

直接采用解析的方法求解功能函数对于随机变量的偏导数较为困难, 然而功能函数的值较易求得, 可以采用数值微分中的中心差商近似代替导数, 即:

$$\frac{\partial G}{\partial c'} \approx \frac{G(c' + \Delta c', \phi, \gamma) - G(c' - \Delta c', \phi, \gamma)}{2\Delta c'} \quad (13)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} \approx \frac{G(c', \phi + \Delta \phi, \gamma) - G(c', \phi - \Delta \phi, \gamma)}{2\Delta \phi} \quad (14)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma} \approx \frac{G(c', \phi + \Delta \gamma) - G(c', \phi, \gamma - \Delta \gamma)}{2\Delta \gamma} \quad (15)$$

为了获得精度较高的中心差商, 往往采用减小计算步长方法, 然而, 步长过小会造成有效数值的损失, 可采用二分步长及误差事后估计法确定满足计算精度所需的步长, 从而获得满足计算精度要求的数值解。

2.1.4 求解步骤

在求解可靠性指标的过程中, 是按验算点  $x_i^*$  计算的,

而验算点  $x_i^*$  值是待求值, 所以上求解可靠性指标的公式是相互制约的, 常采用迭代法计算可靠性指标  $\beta$  和失效概率  $P_F$ 。计算步骤如下:

(1) 已知随机变量的均值、标准差和分布类型以及极限状态方程(随机变量满足正态分布且相互独立);

(2) 假定随机变量的设计验算点  $x_i^*$  (如取随机变量的均值  $m_{x_i}$ );

(3) 按式(13), (14), (15), (8) 求出敏感系数  $\alpha_i$ ;

(4) 将  $\alpha_i, m_{x_i}$  和  $\sigma_{x_i}$  代入式(10), (12) 联立求出  $\beta$  值(在这里可以采用二分法搜索出  $\beta$  值), 然后求出  $x_i^*$  值;

(5) 如果本次求出的  $\beta$  值与上次求得的  $\beta$  值之差在允许误差范围内则停止迭代, 则本次求得的  $\beta$  值就是所求的可靠性指标,  $x_i^*$  为验算点的值, 否则以本次求得的  $x_i^*$  作为下次迭代的取用值, 返回到(3)步进行下一次迭代。

(6) 将求得的可靠性指标代入式(11) 中计算失效概率。

2.2 蒙特卡洛法

2.2.1 基本原理

蒙特卡洛法是从概率的角度出发求解失效概率, 是一种相对精确的方法。首先对影响可靠性的随机变量按照其分布进行大量的随机抽样, 并逐个将抽样值代入功能函数, 累计使功能函数小于零的个数, 从而获得失效频率。根据概率统计理论, 某事件的概率可以用大量实验中该事件发生的频率来估计, 因此, 当抽样次数足够大时, 所获得的失效频率逼近失效概率。在运用蒙特卡洛法的过程中抽样随机性的可靠性和样本数目的大小都是影响估计失效概率精度的主要因素。

可以通过下式进行估计抽样个数。

$$N \geq \frac{100}{P_F} \quad (16)$$

一般来说,  $P_F$  为 0.1%,  $N$  就要达到 10 万以上。

2.2.2 计算步骤

蒙特卡洛法功能函数的建立方法与一次二阶矩法功能函数的建立相同。如果随机变量不是相互独立时也应进行正交变换。

(1) 根据随机变量的分布产生随机变量序列;

(2) 代入功能函数中进行计算, 统计失效概率的次数, 并计算失效概率;

(3) 检查失效概率的稳定性, 如果不稳定则增加抽样的次数, 直到失效概率稳定为止;

(4) 计算安全系数的均值和方差, 并检验其分布, 计算可靠性指标。

3 实例计算

按照上述方法编制基于滑楔法可靠性分析的计算程序, 现在以一个边坡实例计算其可靠性指标和失效概率, 边坡的计算简图见图 1, 软弱层参数见表 1, 这里略去了孔隙水压力和地震荷载的影响, 软弱层参数均服从正态分布且相互独立。

表 1 软弱层参数

参数	$c'/\text{kPa}$	$\phi/(\circ)$	$\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$
均值	9.6	19.6	19.5
变异系数	0.156	0.125	0.050
标准值	8.2	17.3	19.5

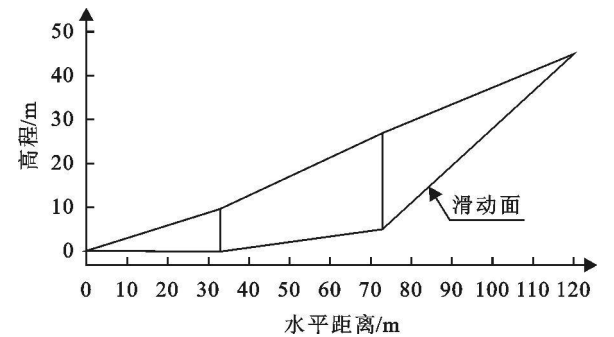


图 1 边坡计算简图

分别按照验算点法和蒙特卡洛法进行该边坡的可靠性指标及失效概率的计算,蒙特卡洛法抽样次数为 10 万次,然后使用常规的方法计算安全系数,计算安全系数时采用的参数为标准值。计算成果见表 2、3。

表 2 计算成果

计算方法	可靠性指标β		失效概率/%		安全系数
	验算	Monte	验算	Monte	
	点法	Carlo 法	点法	Carlo 法	
传递系数法	2.505	2.514	0.612	0.597	1.233
简化 Janbu 法	1.130	1.134	12.924	12.839	1.006
罗厄法	2.171	2.182	1.497	1.457	1.169
工程师团法	1.850	1.857	3.216	3.168	1.114

表 3 验算点及敏感系数成果

计算方法	设计验算点			敏感系数		
	$c'/$	$\phi'/$	$\gamma'/$	$\alpha'_c$	$\alpha'_\phi$	$\alpha'_\gamma$
	kPa	(°)	(kN·m-3)			
传递系数法	8.988	13.552	19.618	0.163	0.985	-0.048
简化 Janbu 法	9.314	16.876	19.558	0.169	0.984	-0.052
罗厄法	9.059	14.361	19.605	0.166	0.985	-0.050
工程师团法	9.133	15.137	19.592	0.168	0.984	-0.051

由计算结果可以看出:

(1) 一次二阶矩法与蒙特卡洛法计算的可靠性指标和失效概率是一致的,从理论上讲蒙特卡洛法计算较为精确,可以用来检验一次二阶矩法计算结果,但蒙特卡洛法不能获得验算点和敏感系数。

(2) 由表 2 可看出可靠性指标和失效概率与安全系数的

变化是一致的。可靠性指标和失效概率对侧向力倾角的假定是敏感的。

(3) 表 3 表明验算点值对于侧向力倾角的假定是敏感的,而侧向力倾角的假定对敏感系数却影响很小。

(4) 表 2 中表明:使用简化 Janbu 法和工程师团法获得的安全系数均大于 1.0,但所得到的失效概率达到了 12.9% 和 3.2%,说明该边坡失稳的可能性较大。

4 结 语

本文基于滑楔法建立极限状态方程,分别采用验算点法和蒙特卡洛法进行边坡稳定可靠性分析,得到如下结论:

(1) 分别采用验算点法和蒙特卡洛法计算边坡的可靠性指标和失效概率可以达到相互印证的作用,同时也可获得验算点的值和各随机变量的敏感系数。

(2) 在验算点法计算中使中心差商近似代替求导是可行的,充分利用传统计算方法,大大简化了编程的难度,而所获得的结果能满足计算精度要求。

(3) 在边坡稳定性分析和评价时,采用传统的安全系数方法分析时结合可靠性分析方法,能获得更为合理、可靠的分析结果。

(4) 可靠性指标对软弱层的内摩擦角敏感性大于软弱层内聚力和坡体岩土重度。

参考文献:

[1] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析- 原理、方法、程序[ M ]. 北京: 水利水电出版社, 2002.

[2] 2002. SL274- 2001. 碾压土石坝设计规范[ S ].

[3] 周维垣. 高等岩石力学[ M ]. 北京: 水利水电出版社, 1989.

[4] 吴世伟. 结构可靠性[ M ]. 北京: 人民交通出版社, 1991.

[5] 孙志忠, 等. 数值分析[ M ]. 福建: 东南大学出版社, 2002.

[6] GB50007- 2002, 建筑地基基础设计规范[ S ].

[7] 赵寿刚, 兰雁, 沈细中, 等. 蒙特卡罗法在土质边坡可靠性分析中的应用[ J ]. 人民黄河, 2006, 28( 5 ): 65- 66.

( 上接第 173 页 )

[ 6 ] 袁玉江, 何清, 喻树龙. 天山山区近 40 a 年降水变化特征与南、北疆的比较[ J ]. 气象科学, 2004, 24( 2 ): 220- 226.

[ 7 ] 刘新春, 等. 新疆阜康荒漠绿洲景观格局动态及其影响因素分析[ J ]. 应用生态学报, 2004, 15( 7 ): 1197- 1202.

[ 8 ] 崔彩霞. 新疆近 40 年气候变化与沙尘暴趋势分析[ J ]. 气象, 2001, 27( 12 ): 138- 141.

[ 9 ] 杨青. 近 10 年来新疆气候变化特征[ J ]. 新疆气象, 1998, 21( 2 ): 9- 12.

[ 10 ] 李林, 朱西德, 周陆生, 等. 三江源地区气候变化及其对生态环境的影响[ J ]. 气象, 2004, 30( 8 ): 18- 22.

[ 11 ] 王让会, 樊自立, 马英杰. 干旱区水域生态系统的水盐耦合关系: 以新疆塔里木河流域为例[ J ]. 应用生态学报, 2002, 13( 2 ): 204- 208.

[ 12 ] 杨青, 何清. 塔里木河流域的气候变化、径流量及人类活动间的相互影响[ J ]. 应用气象学报, 2003, 14( 3 ): 309- 321.

[ 13 ] 秦大河. 气候变化对农业生态的影响[ M ]. 北京: 气象出版社, 2003: 33- 45.

[ 14 ] 蒋德明, 刘志民, 寇振武. 科尔沁沙地荒漠化及生态恢复研究展望[ J ]. 应用生态学报, 2002, 13( 12 ): 1695- 1698.

[ 15 ] 贾宝全, 慈龙骏, 蔡体久, 等. 绿洲- 荒漠交错带环境特征初步研究[ J ]. 应用生态学报, 2002, 13( 9 ): 1104- 1108.

[ 16 ] 任宪友. 两湖平原湿地系统稳定性评价与生态恢复设计[ D ]. 上海: 华东师范大学, 2004: 1- 2.