

一维非饱和土壤溶质运移的有限体积法数值模拟^{*}

吕岁菊¹, 乔英², 刘国林³

(1. 北方民族大学 数值计算与工程应用研究所, 银川 750021; 2. 北方民族大学 信息与计算科学学院, 银川 750021; 3. 宁夏隆德县水利局 水土保持工作站, 宁夏 隆德 756300)

摘 要:应用有限体积法对非饱和土壤一维溶质运移模型进行数值求解, 模拟了土壤水分运动和溶质运移的动态过程。并以实测数据验证了模拟结果的合理性与有效性。通过对有限体积法和有限差分法进行比较, 说明了有限体积法能很好地避免有限差分方法中常常出现的数值弥散和数值振荡现象, 因此在模拟土壤溶质运移规律的研究中, 该方法是一种很好的数值方法。

关键词:有限体积法; 有限差分法; 溶质运移; 数值模拟; 数值模型

中图分类号: S152.7

文献标识码: A

文章编号: 1005-3409(2008)04-0033-04

Numerical Simulation for One dimensional Unsaturated Soil Solute Transport

LÜ Sù-jú¹, QIAO Ying², LIU Guo-lin³

(1. Research Institute of Numerical Computation and Engineering Application, the North University for Ethics. Yinchuan 750021, China; 2. College of Information and Computational Science, the North University for Ethics. Yinchuan 750021, China; 3. Work Station of Soil and Water Conservation for Water board, Longde, Ningxia 756300, China)

Abstract: One dimensional solute transport model is numerically solved with finite volume method in unsaturated soils. The dynamic procedures of soil water movement and solute transport are simulated. The rationality and validity of simulated results have also been verified by experimented data. Through comparing finite volume method (FVM) with finite difference method (FDM), it shows that FVM can avoid the phenomenon of numerical disperse and numerical shake which frequently happens in FDM. Therefore, for simulating soil water and solute movement, finite volume method is a good and practical numerical method in engineering application.

Key words: finite volume method; finite difference method; solute transport; numerical simulation; numerical model

土壤中含有的溶质对人类生活、生产活动有重要的影响,很多重要的农业过程,如土壤盐渍化及脱盐,土壤中营养成分及化肥的有效利用等都受到土壤中溶质运移规律的支配^[1-2]。不仅如此,土壤中溶质的存在和发展成为更广泛和更深远的水土环境问题。因此,需要了解溶质在土壤中的运移与转化规律,对土壤中溶质的时空分布和变化进行预测和预报^[3]。由于盐分在土壤中的运动是一个非常复杂的运动过程^[4],对溶质运移规律的模拟除了要有准确、充足的数据外,还取决于计算方法的选择。目前,在土壤水-盐运移模拟中一般常用的数值方法是有限差分法和有限元法。如王福利、姚德良、徐力刚、陈启生等用有限差分法模拟了不同条件下的土壤水-盐运移规律,参见文献^[4-8]。程先军^[9]、武新乾^[10]等采用有限元法对土壤水分运动和溶质运移数学模型进行求解。用通常的差分方法在求解土壤水-

盐运移问题中还有其局限性,只有当弥散作用占优时,才能取得较为满意的结果。在求解弥散系数较小、流速相对较大的对流占优问题时,经常遇到数值弥散和数值振荡现象^[3-4,7]。本文利用有限体积法来模拟一维非饱和土壤溶质的运移规律,并通过算例与有限差分法进行比较。由于有限体积法具有物理意义上的守恒性,能有效地克服这种现象。

1 一维非饱和土壤溶质运移的数学模型

非饱和土壤水分运动和溶质运移的基本方程为^[11-12]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial (qC)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_s(v, \theta) \frac{\partial C}{\partial x} \right] - \frac{\partial (qC)}{\partial x} \quad (2)$$

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K(\theta) \quad (3)$$

* 收稿日期: 2007 09 05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671157); 宁夏高等学校科研项目(2007jy010)

作者简介: 吕岁菊(1976-),女,宁夏隆德人,硕士,助理研究员,主要从事土壤水盐运移规律数值模拟方面的研究。E-mail: lv_suiju@163.com

式中: θ ——土壤体积含水量; C ——土壤溶质浓度(ml/L);
 $D_{sh}(v, \theta)$ ——土壤水力弥散系数(cm^2/min); q ——土壤水分通量($\text{cm}^2/\text{cm}^2 \cdot \text{min}$), 由水分运动求得; $K(\theta)$, $D(\theta)$ ——非饱和土壤导水率和扩散率。

初始条件和边界条件:

$$C(x, 0) = C_0 \quad (x \geq 0) \quad (4)$$

$$C(0, t) = C_s \quad (t > 0) \quad (5)$$

$$C(L, t) = C_0 \quad (t > 0) \quad (6)$$

式中: C_0 ——初始土壤溶质浓度(ml/L); C_s ——上边界土壤

溶质浓度(ml/L)。

2 数值模型

2.1 有限体积法数值模型的建立

应用微分法则和水流的连续性方程^[6]将溶质转移方程整理为

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} + q \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [D_{sh} \frac{\partial C}{\partial x}] \quad (7)$$

用有限体积法^[13]离散(7)式。

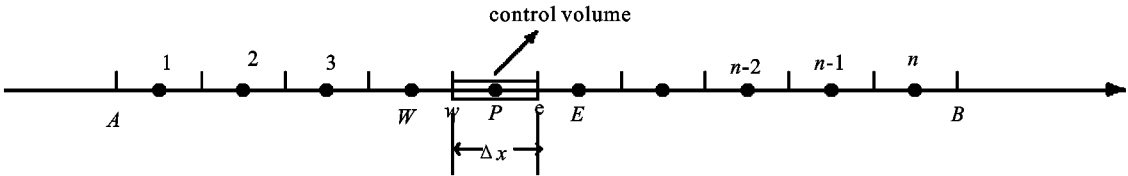


图 1 节点示意图

将全部求解区域 $[0, L]$ 离散为 n 个结点, 编号 $P=1, 2, \dots, n$, W 和 E 分别为 P 的相邻结点, 取小矩形框 $w-e$ 为控制体(control volume), w 和 e 一般为中点。空间步长为 $\Delta x = L/n$, 其中 $P=1$ 和 $P=n$ 为靠近边界的结点, 距离边界的空间步长为 $\Delta x/2$, 将时间域($0 \leq t \leq T$)离散为 K 个单元, 时间步长取为 $\Delta t = T/K$, 时间结点编号为 $k=0, 1, 2, \dots, K$ 。

对方程(7)两边积分:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \theta \frac{\partial C}{\partial t} dv dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} q \frac{\partial C}{\partial x} dv dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} [D_{sh} \frac{\partial C}{\partial t}] dv dt \quad (8)$$

采用完全隐格式离散并整理

$$\frac{\theta_P (C_P - C_P^0)}{\Delta t} \Delta x + q_P (C_e - C_W) = D_{sh}(\theta_e) \frac{C_E - C_P}{\Delta x} - D_{sh}(\theta_W) \frac{C_P - C_W}{\Delta x} \quad (9)$$

在式(9)中, 由于 C_e , C_W , $D_{sh}(\theta_e)$, $D_{sh}(\theta_W)$ 不是结点处的值, 须采用中心差分来近似处理。

所以, 当结点 $P=2, 3, \dots, n-1$ 时, 令 $r = 2 \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$, 把(9)整理为

$$a_W C_W + a_P C_P + a_E C_E = b_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned} a_W &= - (D_{sh}(\theta_P) + D_{sh}(\theta_W) + \Delta x \cdot q_P) \\ a_P &= D_{sh}(\theta_E) + 2D_{sh}(\theta_P) + D_{sh}(\theta_W) + r\theta_P \\ a_E &= - (D_{sh}(\theta_E) + D_{sh}(\theta_r) - \Delta x \cdot q_P) \\ b_i &= r\theta_P C_P^0 \end{aligned}$$

2.2 定解条件的离散

当结点 $P=1$ 时, 控制体的左边和上边界重合, 即 $D_{sh}(\theta_W) = D_{sh}(\theta_A)$, $\theta_A = \theta_s$, $C_W = C_A = C_s$ 。因此式(9)可写为

$$\frac{\theta_P (C_P - C_P^0)}{\Delta t} \Delta x + q_P (C_e - C_W) = D_{sh}(\theta_e) \frac{C_E - C_P}{\Delta x} - D_{sh}(\theta_A) \frac{C_P - C_W}{\Delta x/2} \quad (11)$$

将上式整理为

$$a_W C_W + a_P C_P + a_E C_E = b_1 \quad (12)$$

当结点 $P=n$ 时, 控制体的右边和下边界重合, 即 $D_{sh}(\theta_e) = D_{sh}(\theta_B)$, $\theta_B = \theta_0$, $C_e = C_B = C_0$ 。因此式(9)可写为:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_P (C_P - C_P^0)}{\Delta t} \Delta x + q_P (C_B - C_W) &= D_{sh}(\theta_B) \frac{C_B - C_P}{\Delta x/2} - D_{sh}(\theta_W) \frac{C_P - C_W}{\Delta x} \end{aligned} \quad (13)$$

将上式整理为

$$a_W C_W + a_P C_P + a_E C_E = b_n \quad (14)$$

(12), (14) 式中系数的整理同(10)式, 由(10), (12), (14)式形成三对角代数方程组

$$A C^k = B^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (15)$$

利用初始条件 C_i^0, θ_i^0 ($i=1, 2, 3, \dots, n$), 对每一个时间层 k , 先根据土壤水分运动的数值模型算出含水量 θ_i^k , 再算出水分通量 q 和水动力弥散系数 $D_{sh}(\theta)$ 就可求得矩阵 A 和向量 B , 进而可用追赶法求解(15)式, 便可得到末了时刻各点的盐分浓度 C 和含水量 θ 的值。

3 数值模型的检验

利用 MATLAB 软件对两种不同容重水平入渗的土壤进行模拟, 模拟资料取自参考文献[14]。

第一组: 土壤容重 $r = 1.3 \text{ g/cm}^3$, 土体长度 $L = 15 \text{ cm}$, 入渗时间 $t = 85 \text{ min}$ 及 $t = 205 \text{ min}$; 水分扩散系数 $D(\theta) = a\theta^b = 6.32\theta^{2.799}$; 水动力弥散系数 $D_{sh}(\theta) = e\theta^f = 40.937\theta^{5.266}$ 。

初始条件

$$\theta(x, 0) = \theta_0 = 0.04 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

$$C(x, 0) = C_0 = 167.187 \text{ ml/L}$$

上边界条件

$$\theta(0, t) = \theta_s = 0.5 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

$$C(0, t) = C_s = 50.0 \text{ ml/L}$$

下边界条件

$$\theta(L, t) = \theta_0 = 0.04 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

$$C(L, t) = C_0 = 167.187 \text{ ml/L}$$

用有限体积法数值模型式(15)对上述试验进行数值模拟($\Delta x = 1 \text{ cm}$, $\Delta t = 1 \text{ min}$) 允许误差采用前后两次计算结果差不大于 0.001。通过计算得到, 时间 $t = 85 \text{ min}$, 205 min 时

的盐分浓度分布。将计算结果与实测资料进行比较如图 2。

第二组: 土壤容重 $r=1.2\text{ g/cm}^3$, 水分扩散系数 $D(\theta)=a\theta^b=17.319\theta^{3.087}$; 水力弥散系数 $D_{dh}(\theta)=e\theta^f=81.374\theta^{4.86}$; 用同样的方法通过计算得到时间 $t=85\text{ min}$, 205 min 时的盐分浓度分布。将计算结果与实测资料比较如图 3。

从上述两组结果可以看出, 利用有限体积法建立的土壤溶质运移数值模型模拟的结果与实测结果比较吻合, 数值计算所产生的误差较小, 符合实际工作的要求, 说明该模型用于模拟土壤水-盐运移是可行的。

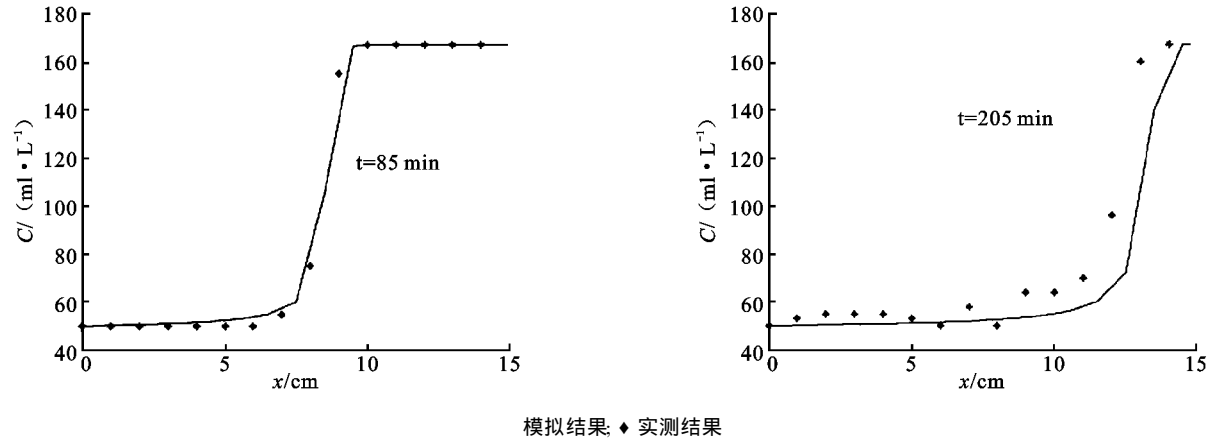


图 2 数值解和实测数据的比较

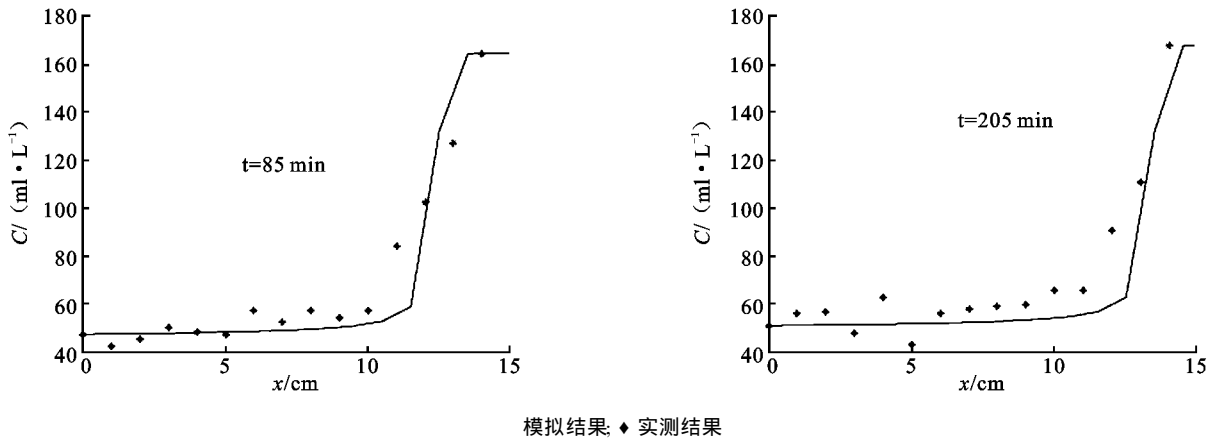


图 3 数值解和实测数据的比较

4 有限体积法和有限差分法的比较

大量的实践证明: 在用有限差分法解决土壤水-盐运移问题中, 经常产生数值弥散或数值振荡等现象。而有限体积法因其严格满足控制体及整个计算区域的水量和动量平衡,

由此建立的守恒性离散格式在计算连续流时保证无守恒的误差^[15], 从而避免了上述两种现象。

对上述算例中盐分运移问题进行比较, 当 $r=1.2\text{ g/cm}^3$, $t=205\text{ min}$ 时分别对 $\Delta t=1\text{ min}$, $\Delta t=5.0\text{ min}$ 及 $\Delta t=10\text{ min}$ 时用两种方法进行模拟, 结果如图 4、5 所示。

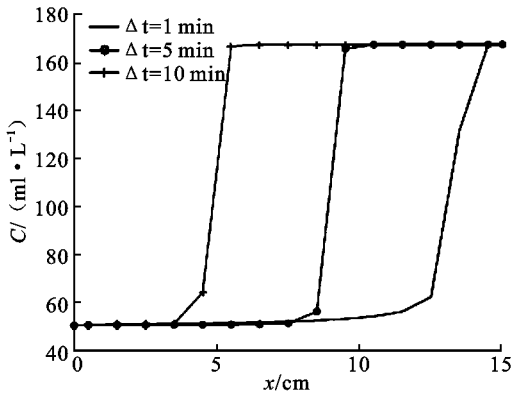


图 4 取不同步长时有限体积法模拟结果

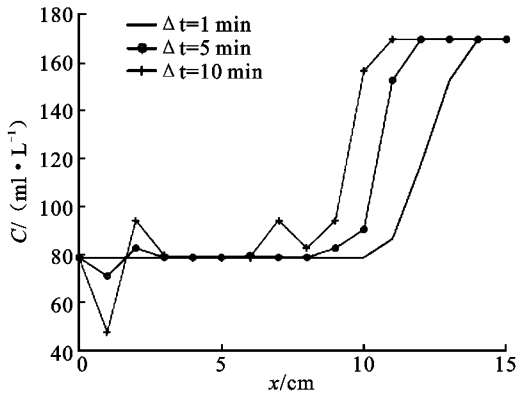


图 5 取不同步长时有限差分法模拟结果

通过模拟结果可以看到, 当时间步长较小时(如取 $\Delta t=1$ min), 两种数值方法的模拟结果都比较稳定。但当时间步长增大时(如取 $\Delta t=5$ min, $\Delta t=10$ min) 有限差分法的数值结果出现了明显的数值振荡, 而有限体积法有效地克服了这种现象, 因而它的数值稳定性较好。

5 结 语

给出了一维非饱和土壤溶质运移的有限体积数值模型, 分别对不同参数的土壤进行了数值模拟, 模拟结果是很有效的。由于用有限体积法得出的离散方程, 积分守恒对任意一组控制体都能得到满足, 对整个计算区域自然也得到满足。该方法即使在粗网格情况下, 也显示出准确的积分守恒, 而有限差分法仅当网格足够细时, 才可避免数值振荡。因而, 有限体积法不仅具有较强的灵活性, 能够满足复杂边界问题的需要, 而且数值稳定性较好, 是一个值得推荐的数值计算方法。

参考文献:

[1] 徐冰, 郭克贞, 王耀强. 土壤中溶质运移的研究现状及问题[J]. 内蒙古水利, 2003(3): 20-22.

[2] 宓永宁, 周林飞, 姜文俊. 土壤中溶质的运移与数值解讨论[J]. 沈阳农业大学学报, 1996, 27(S1): 73-75.

[3] 徐力刚, 杨颈松. 土壤水盐运移的简化数学模型在水盐动态预报上的应用研究[J]. 土壤通报, 2004, 35(1): 9-11.

[4] 徐力刚, 杨劲松, 张妙仙. 种植作物条件下粉砂壤质土壤水- 盐运移数值模拟研究[J]. 土壤学报, 2004, 41

(1): 50-55.

[5] 王福利. 降雨淋洗条件下溶质在土壤中运移的初步研究[J]. 土壤学报, 1992, 29(4): 20-24.

[6] 王福利. 用数值模拟方法研究土壤盐分动态规律[J]. 水利学报, 1991(1): 1-8.

[7] 姚德良, 朱进生. 土壤水盐运动模式研究及其在干旱区农田的应用[J]. 中国沙漠, 2001, 21(3): 287-289.

[8] 陈启生, 戚隆溪. 有植被覆盖条件下土壤水- 盐运动规律研究[J]. 水利学报, 1996(1): 38-46.

[9] 程先军, 许迪. 地下滴灌土壤水运动和溶质运移的数学模型及验证[J]. 农业工程学报, 2001, 17(6): 1-3.

[10] 武新乾, 张德生. 非均匀土壤中溶质运移的数值模拟[J]. 纺织高校基础科学学报, 2003, 16(1): 5-9.

[11] 雷志栋. 土壤水动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988: 25-37.

[12] 李韵珠, 李保国. 土壤溶质运移[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 131-138.

[13] Versteeg H K, Malalasekera W. An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method[M]. Longman: Prentice Hall Press, 1995: 85-154.

[14] 高新科, 张富仓, 刘俊杰. 非饱和土壤溶质运移数值模拟的初步研究[J]. 西北农业大学学报, 1996, 24(2): 66-69.

[15] 钱作勤, 郑雪晴, 张谢东. 有限体积法在求解传热学中温度场的应用初探[J]. 武汉造船, 1998(6): 7-10.

(上接第 32 页)

[16] 梁季阳, 蒋业放, 成立, 等. 柴达木盆地水资源决策支持系统的设计与开发研究[J]. 自然资源学报, 2000, 15(1): 80-85.

[17] 刘桂宏, 孙健. 灌区灌溉管理监控自动化系统的开发和应用[J]. 灌溉排水, 2001, 20(1): 65-68.

[18] 王晓峰, 李欣苗. 关中地区大型灌区信息管理决策支持系统应用研究[J]. 中国生态农业学报, 2002, 10(3): 134-135.

[19] 保翰璋, 姚檀栋, 李文君, 等. 疏勒河流域水资源管理决策支持信息系统设计[J]. 遥感技术与应用, 2000, 17(6): 337-343.

[20] 段永刚, 汪志农, 尚虎君. 基于组件式 GIS 渠系配水管理系统的设计[J]. 节水灌溉, 2006(6): 7-12.

[21] 宋松柏, 李世卿, 刘建国. 内蒙古河套灌区灌排信息管理决策支持系统[J]. 灌溉排水, 2001(1): 69-73.

[22] Little J D C. The use of storage water in a hydroelectric system [J]. Operations Research, 1955, 3: 187-197.

[23] P. A. 沃伯斯. 美国得克萨斯州的流域水资源管理模型[J]. 水利水电快报, 2004, 25(17): 1-5.

[24] 孔祥林. 决策支持系统在墨西哥里奥莱尔马流域的应用[J]. 水利水电快报, 2005, 26(7): 9-11.

[25] 卢玲, 程国栋. VRML 技术在黑河水资源支持系统中的应用[J]. 遥感技术与应用, 1999, 14(2): 15-20.

[26] 宋松柏, 冯国璋, 王双银, 等. 综合利用水库优化调度决策支持系统[J]. 水科学进展, 2002, 13(3): 358-362.

[27] 王煜, 夏连强, 侯传河, 等. 可视化技术在水量调度决策支持系统中的应用[J]. 水利水电技术, 2002, 33(2): 36-39.