

梯形渠道渠底土层水分溶质运移模拟研究

马孝义, 徐秋宁, 王文娥
(西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 陕西 杨陵 712100)

摘要: 建立了梯形渠道浸水过程中水盐运动数学模型及其定解条件, 用混合拉普拉斯变换有限元数值解法, 初步分析了其渠道浸水预溶过程渠底土层中水盐运动规律。结果表明: 混合拉普拉斯变换有限元法求解梯形渠底土层水分运动和溶质运移过程, 计算时间短, 精度较高结果稳定, 可用于梯形渠底水分运动和溶质运移的模拟。
关键词: 梯形渠道; 拉普拉斯变换; 有限元法; 水盐运移; 模拟
中图分类号: S 152.7 文献标识码: A 文章编号: 1005-3409(2002)02-0029-05

Simulation Research on Numerical Model of Water Salt Transport
of Trapezoid Canal Bottom

MA Xiao-yi, XU Qiu-ning, WANG Wen-e
(College of Water Conservancy and Architectural Engineering, Northwest Sci-tech University of
Agriculture and Forestry, Yangling 712100, Shaanxi Province, China)

Abstract: The mathematical model of the water-salt transport of trapezoid canals bottom soil is established, using the hybrid Laplace transform finite element method, the water salt transport of the trapezoid canals bottom in process of immersion beforehand are analyzed. The results show that hybrid Laplace transform finite element method is robust, reliable, and precise, the method can solve the water salt transport equation of the trapezoid canals.
Key words: trapezoid canals; hybrid Laplace transform; finite element method; water salt transport; simulation

土建工程地基中水分溶质的运移直接影响着工程建设的质量, 研究其变化规律及其计算方法, 对土建工程的建设有重要的理论意义和实用价值。如在盐渍土地区修建的渠道, 在开始输水过程中, 渠底土层中水分运动带动其中盐离子向下运动, 渠底土层中的溶质浓度分布发生改变, 从而产生流变效应, 发生不均匀沉降, 造成渠道衬砌和建筑物的开裂和破坏, 对渠道和渠系建筑物造成危害更是严重。在渠道地基处理时, 浸水一段时间, 冲洗渠底土壤中的盐分, 使地基土预先产生溶陷, 这样在其后修建建筑物, 即使今后输水过程中透水, 其溶陷变形也要小得

多, 实际上这是一种简易的“原位换土法”, 它可改善地基溶陷等级。而浸水预溶的效果与浸水时间和土质条件, 主要是地基土的渗透性和含盐量等密切相关, 但过去国内外大多是通过试验研究进行的, 周期性强, 工作量大, 费用高。本文的目的是试图以渠底浸水预溶过程为例, 建立梯形渠道渠底土层水盐运动方程及其定解条件, 探讨其数值解法, 分析浸水时间对渠底土壤水分盐分运移规律, 为研究梯形渠道渠底的水盐运动的影响, 解决与之相关的渠道工程建设问题提供理论和方法。

¹ 收稿日期: 2001-09-25
基金项目: 国家科技产业示范工程项目(99-021-01-02); 国家自然科学基金项目(49871040)。
作者简介: 马孝义, 男, (1965-), 陕西凤翔人, 教授, 博士, 主要从事农业水土工程方面的研究。

1 数学模型的建立

1.1 土壤水分运动基本方程

对于二维非饱和土壤水分运动,其扩散方程为^[1]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}]}{\partial x} + \frac{\partial [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}]}{\partial z} + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (1)$$

式中: $D(\theta)$ ——扩散度; θ ——土壤含水量; $K(\theta)$ ——土壤渗透系数。

1.2 土壤溶质运移基本方程

对于二维非饱和土壤,在不考虑溶质运移过程的吸收时,其溶质运移方程为^[1]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (D_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xz} \frac{\partial c}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (D_{zx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{zz} \frac{\partial c}{\partial z}) - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2)$$

式中: c ——溶质浓度(g/L); D_{xx} 、 D_{zz} 、 D_{xz} 、 D_{zx} 分别为水动力弥散系数分量; V_x 、 V_z 分别为 x 、 z 方向的孔隙流速。

溶质运移过程定解条件包括初始条件和边界条件,初始条件即为计算开始溶质浓度的分布。边界条件主要有两种:

浓度已知的边界,即边界上 c 为常量(或已知量)。

浓度通量已知的边界,即边界上的 q_c 为已知。

2 二维土壤水分与溶质运移方程的混合拉普拉斯变换有限单元法求解

对上述非稳定的二维水分和溶质运移问题进行求解时,传统的方法是将其时间导数采用差分法化为代数方程组,进行步进式求解,但这一方法不允许使用大的空间和时间步长,特别是时间步长,否则易导致求解失真,而对水分、溶质长时间运移规律模拟,采用小的时间步长又将需要很长计算时间,使实际工程无法应用,为克服这一矛盾,Liggett 和 Liu (1983),Sudicky (1992),任理(1997)曾探讨了将拉普拉斯变换引入数值计算的方法^[2~4],其推导过程为:

对溶质浓度 $c(x, z, t)$ 进行拉普拉斯变换,即:

$$\tilde{c}(x, z, s) = L[c(x, z, t)] \quad (3)$$

对方程(2)进行拉普拉斯变换,得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (D_{xx} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + D_{xz} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (D_{zx} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + D_{zz} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z}) \\ & - V_x \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} - V_z \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} = s\tilde{c} - c(x, z, 0) \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $\tilde{c} = \tilde{c}(x, z, s)$ 是变换后的浓度,是拉斯变换参数, $\tilde{c}(x, z, 0)$ 是原物理空间的初始浓度分布。

若为第一类边界条件:

$$c(x, z, t) = c^1 = \text{const} \quad (5)$$

则经拉斯变换后此边界条件变为:

$$\tilde{c}(x, z, t) = c^1/s \quad (6)$$

用试探函数作为方程(4)的近似解:

$$c(x, z, s) = \sum_{j=1}^N \tilde{c}_j(s) \Phi(x, z) \quad (7)$$

以算子表示方程(4),则由 Galerkin 法得:

$$\iint_{(R)} L(\tilde{c}) \Phi dx dz = 0 \quad (8)$$

由以上各式,得:

$$\begin{aligned} & \iint_{(R)} \sum_{i,j=1}^N (v_x \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V_y \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} + D_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \\ & D_{xz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + D_{zx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + D_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \\ & s \Phi \Phi) c_j(s) - c(x, z, 0) \Phi dx dz \\ & (i = 1, 2, \dots, N); (j = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (9)$$

若令 $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_N)^T$, 则方程组(9)可简写为下列形式:

则方程组(9)可简写为下列形式:

$$[A] \tilde{c} + F = 0 \quad (10)$$

式中矩阵 $[A]$ 和向量 F 的单元值分别为:

$$\begin{aligned} [A_{ij}] &= \iint_{(R)} (v_x \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_z \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} + D_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &+ D_{xz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + D_{zx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + D_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &+ s \Phi \Phi) dx dz \\ F_1 &= - \iint_{(R)} \tilde{c}(x, y, 0) \Phi dx dz \end{aligned} \quad (11)$$

利用有限元法把区域 (R) 剖分成若干单元 (R_m) $m = 1, 2, \dots, M$, 设共有 N 个结点, 则(11)式可写成:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{m=1}^M \iint_{(R_m)} (v_x \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_z \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \\ &D_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + D_{xz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \\ &D_{zx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + D_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + s \Phi \Phi) dx dz \end{aligned} \quad (12)$$

规定基函数为:

$$\Phi(x_j, z_j) = \sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad (13)$$

其中 (x_j, z_j) 是第 j 个结点的坐标, 将区域划分成三角形网格, 其三角形的顶点为结点, 三个顶点的

结点号码为 i, j, k 坐标分别为 $(x^i, z^i), (x^j, z^j), (x^k, z^k)$ 规定和这三个结点相联系的基函数在单元 (\quad) 中的值为:

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2}(a_i + b_ix + c_iz)$$
$$l = i, j, k \quad (x, z) \quad (\quad) \tag{14}$$

其中:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j z^k - x^k z_j & b_i &= z_j - z^k & c_i &= x^k - x_j \\ a_j &= x_k z^i - x^i z_k & b_j &= z_k - z^i & c_j &= x^i - x_k \\ a_k &= x_i z^j - x^j z_i & b_k &= z_i - z_j & c_k &= x^j - x_i \end{aligned} \tag{15}$$

是三角形单元 (\quad) 的面积, 对于式(14) 给出的基函数有:

$$\begin{aligned} \iint \Phi dx dz &= \quad / 3 \\ \iint \Phi^2 dx dz &= \quad / 6 \\ \iint \Phi \Phi dx dz &= \quad / 12 \quad (i \quad j) \end{aligned} \tag{16}$$

将基函数的表达式(14) 代入到式(12) 并利用式(16) 可直接算出

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(\quad)} &= \frac{1}{4}[D_{xx}b_ib_j + D_{xz}(b_ic_j + c_ib_j) \\ &+ D_{zz}c_ic_j] + \frac{1}{6}(v_xb_j + v_zc_j) + B^{(\quad)}_{ij} \\ B_{ij}^{(\quad)} &= - \iint \Phi \Phi dx dz = \begin{cases} s \overline{6} & \text{当 } i = j \\ s \overline{12} & \text{当 } i \neq j \end{cases} \\ F_i^{(\quad)} &= - \frac{1}{(\quad)} c(x, z, 0) \Phi dx dz \\ &= - \frac{1}{(\quad)} c(x, z, 0) \cdot \quad / 3 \end{aligned} \tag{17}$$

先对每个单元形成 $[A]$ 和在该单元中的部分, 再对所有单元叠加形成整体的 $[A]$ 和 F , 并结合边界条件建立起所需要的方程组(10), 由式(17) 知, 系数矩阵是高度稀疏非对称复矩阵, 为了节省计算机内存, 使用压缩存储的技巧, 将方程非零系数按最大带宽存入二维数组中, 然后根据各计算结点的相邻结点编号和相邻结点的个数, 采用高斯消去法求解此二维数组, 即可获得象空间的浓度分布 $\tilde{c}\{x, z, s\}$ 。

接着对这个离散的有限元方程组的解 $\tilde{c}\{x, z, s\}$ 进行反演, 若 L^{-1} 以表示拉斯反演, 则由(3) 有:

$$\begin{aligned} c(x, z, t) &= \sum_{i=1}^N L^{-1}[\tilde{c}_j(s)] \Phi(x, z) \\ &= \sum_{j=1}^N c_j(t) \Phi(x, z) \end{aligned} \tag{18}$$

这里 $c_j(t)$ 是在结点 j 处不同时间的浓度:

采用拉斯反演算法进行数值反演, 其反演公式为:

$$\begin{aligned} c_j(t) &= \frac{1}{T} \exp(p_0 t) \{ \frac{1}{2} \tilde{c}_j(p_0) + \sum_{k=1}^{2K} \text{Re}[\tilde{c}_j(p_k) \\ &+ \frac{R\pi i}{T} \exp(\frac{R\pi i t}{T})] \} + E \end{aligned} \tag{19}$$

式中: T 值取 $0.8t_{\max}, t_{\max}$ 为最大计算时段, E 为计算精度值, K 一般可取 5 以上值,

$$p_0 = - \ln(E)/2T$$

3 梯形渠道水盐运移的实例研究

根据上述过程, 以梯形渠道进行浸水预溶过程的水盐运动为例进行模拟, 渠道底宽为 2 m, 边坡比为 1 : 1.5, 地下水埋深在渠底以下 7 m, 渠底土层干容重 1.5 g/cm³, 初始含水量 14.5%, 饱和含水量 29.6%, 折算成体积含水量分别为 21.8%、44.4%, 初始含盐(Na₂SO₄) 量 32 mg/g = 3.2 × 10⁻⁴, 由于土壤特性为各向同性, 其各方向的水分渗透系数和扩散系数及盐分的水动力弥散系数相等, 水分渗透系数 $K_x = K_z = 6.3 \times 10^{-5}$ cm²/s, 水分扩散系数 $D = 3.709 \times 10^{-3}$ cm²/s, 硫酸盐水动力弥散系数 $D_{xx} = D_{xz} = D_{zz} = 3.709 \times 10^{-3}$ cm²/s。

3.1 土壤水分运动方程定解条件

初始时, 整个区域含水量

$$\theta = \theta_0 = 0.218 \tag{20}$$

浸水过程中, 渠道边界 ABC 上各点含水量等于饱和值

$$\theta = 0.444 \quad t > 0 \tag{21}$$

渠道上边界 AF 上各点, 垂直方向的水流量与蒸发强度相等, 由于蒸发强度相对土壤入渗量较小, 故为简化略去不计。假定蒸发强度为零。

$$D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) = 0 \quad t > 0 \tag{22}$$

对称边界 CD 上各点, 没有水分交换, 横向水流通量为零。

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad t > 0 \tag{23}$$

在渠道下边界 ED 处各点, 含水量达到饱和

$$\theta = 0.444 \quad t > 0 \tag{24}$$

在渠道 E 处点上, 距渠道较远, 假定浸水过程中含水分运动水量保持不变

$$\theta = 0.218 \quad t > 0 \tag{25}$$

3.2 土壤盐分运动方程定解条件

初始时: 整个区域的含盐量

$$c = 3.2 \times 10^{-4} \tag{26}$$

浸水过程中: 渠道边界 ABC 处与渠水相接, 渠

水含盐量较小, 假定始终为零

$$c = 0 \quad t = 0 \tag{27}$$

渠道上边界 AF 处无盐分交换, 盐分运移通量为零

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad t > 0 \tag{28}$$

渠道对称边界 CD 上, 无横向盐分交换

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad t > 0 \tag{29}$$

渠道边界 EF 处距渠道远, 假定浸水对盐分运移无影响, 含盐量始终保持不变

$$c = c_0 = 3.2 \times 10^{-4} \tag{30}$$

渠道下边界 ED 处为地下水位处, 地下水含盐量假定为零

$$c = 0 \tag{31}$$

3.3 有限元网格划分

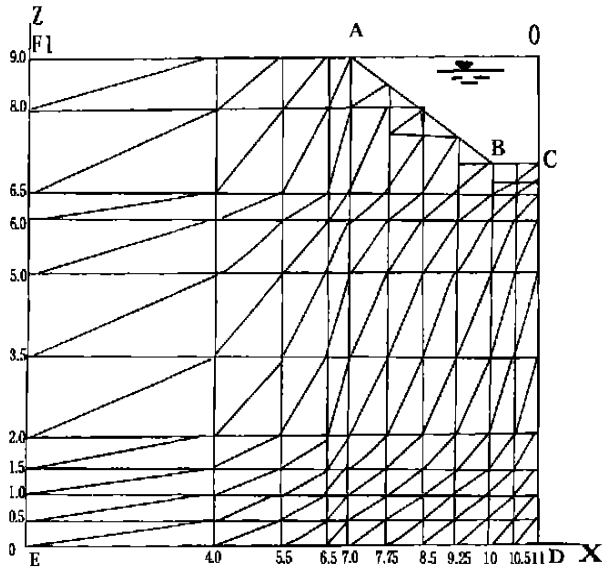


图 1 梯形渠道地基土层水盐运动有限元划分图

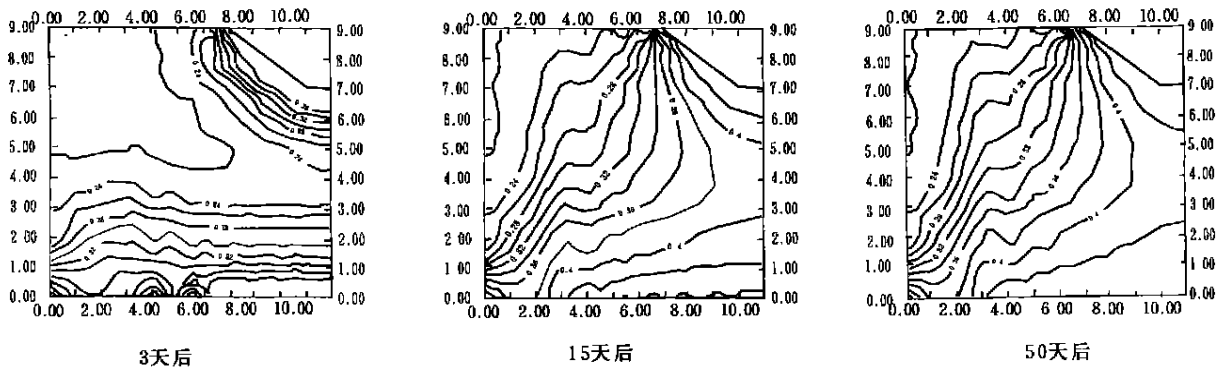


图 2 梯形渠道地基土层浸水过程中的水分分布图

在求解渠底土层水分分布后, 计算其不同时间的流速分布, 模拟渠底土壤的盐分运移, 见图 3, 可以看出, 渠底土层的盐分运移与水分运移类似, 渠底

为减少计算工作量并考虑渠底土层中的水分和盐分在沿渠底中线对称分布, 取半边渠道底部和侧部为计算区域, 考虑到不影响计算精度和减少结点和单元数, 区域左边界取在距渠道中线 11 m 处, 其它边界为分别取地面、渠道底部和渠侧, 渠道中线及地下水位处, 在该计算区域设置 121 个结点, 划分 200 个三角形单元。为保证计算精度, 在渠底、渠侧附近和接近地下水位处, 结点较密, 其它地方较稀。每行和每列的结点数相等, 这样可按等带宽带形方程存贮和求解, 可以减少计算误差, 保证精度, 并减少计算机存贮单元, 便于微机计算^[6], 图 1 为梯形渠到地基土层水盐运动有限元网格划分图。

3.4 模拟结果分析

基于上述方法编制计算机程序, 对已知梯形渠道浸水预溶过程中的渠底土壤水分运动和盐分运移, 利用混合拉普拉斯变换有限元方法进行模拟, 得出浸水后 3 d、15 d、50 d 的渠底土层的水分分布, 见图 2。可以看出随着浸水时间的延续, 从梯形渠道底部和侧部水分向四周快速扩散。由于渠道水和地下水的双重作用, 会形成在渠底附近和地下水处两个土壤含水量高位区, 随着灌水时间的延长, 土壤湿润圈的深度范围不断扩大, 发生地下水峰, 并逐渐向上扩展。随着浸水时间的进一步延长, 地下水峰上升到渠底, 渠水与地下水连成一片, 并逐步向周围扩散。

同时 15 d 与 50 d 的渠底土层的水分分布差别不大, 在浸水过程中的渗水得以稳定。这符合渠底渗流规律, 说明利用该方法模拟渠底渗流运动效果较好。

附近的盐分随着水分运动, 向下和向两侧运移, 随着浸水过程的增长, 距渠底与渠侧一定范围的盐分减少, 并形成从渠道远处和地下水位处向渠底和渠侧

部递减的等值线, 不过渠底盐分的减少速度较慢。在浸水 15 d 后含盐量为 2.7×10^{-4} 的等值线移动到距渠底 0.45 m 处, 30d 后移动到距渠底距离 0.95 m 处, 300 d 后距渠底 1.0 m 距离处。

该等值线范围内盐分明显减小。30 d 与 300 d 的渠底与渠侧盐分分布差别较小, 说明 30 d 后渠底与渠侧盐分含量趋于稳定。换句话说, 该渠道浸水

30 d 后的渠底盐分与长期浸水差别较小, 故初步判断 30 d 浸水可满足浸水预溶要求。这符合渠底溶质运移规律, 说明利用该方法模拟渠底盐分运移效果较好, 计算时间短, 结果稳定, 可作为研究梯形渠道渠底的水盐运动规律, 解决与之类似的实际渠道工程建设问题的方法。

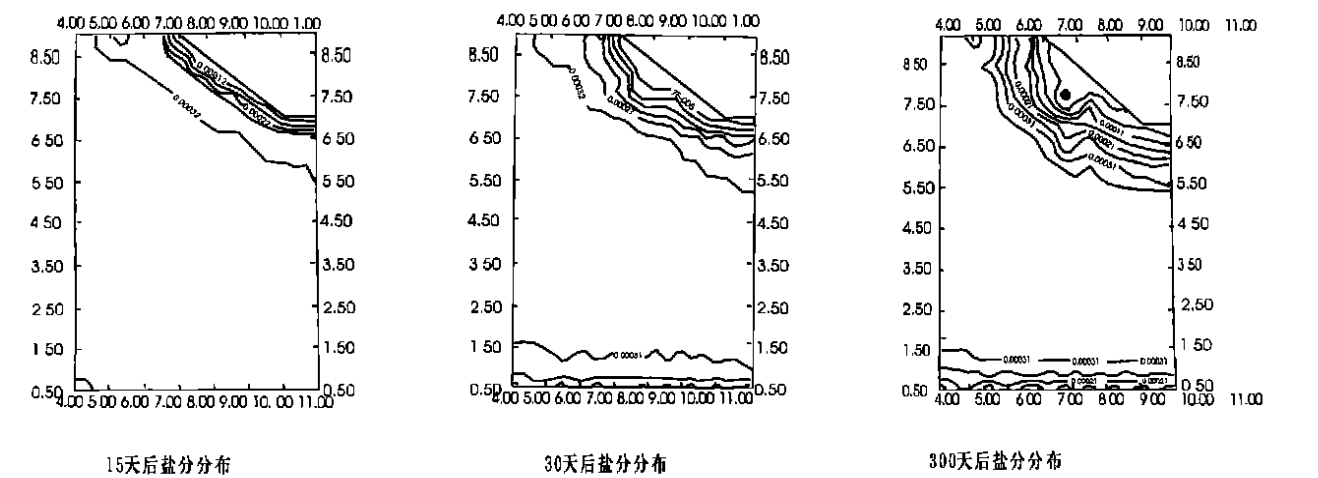


图 3 梯形渠道地基土层浸水过程中的盐分分布图

4 结 论

以渠道浸水预溶过程建立了梯形渠道浸水水盐运动数学模型及其定解条件, 用混合拉普拉斯变换有限元数值解法, 初步分析了渠底土层浸水预溶过程中水盐运动规律。研究表明, 用混合拉普拉斯变换

有限元法求解梯形渠底土层水分运动和溶质运移过程, 具有计算时间短, 精度较高和结果稳定可靠的优点。运用混合拉普拉斯变换和有限元分析梯形渠道地基水分和盐分运移规律是可行的, 它可作为研究梯形渠道渠底的水盐运动规律, 解决与之相关的实际渠道工程建设问题的简便方法。

参考文献:

[1] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传, 等. 土壤水动力学[M]. 清华大学出版社, 1988.

[2] Liggett, J A, P LF Liu. The boundary integral equation method for porous media flow[M]. [s. l.]: Allen and Unwin Winchester Mess , 1983.

[3] Sudicky, E A, Mciaren, R G. The Laplace transform Galerkin technique for larg- scale simulation of mass transport in discrely fractured porous formations[J]. Water Resour. Res. , 1992, 28(2) : 499- 514.

[4] 任理. 混合拉普拉斯变换有限单元法计算, 二维地下水溶质运移问题[J]. 水利学报, 1997(4) : 17- 25.

[5] G. Hong, U. Hirdes. A method for the numerical inversion of Laplace[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1984, 10: 113- 132.

[6] 徐士良. Fortran 常用算法程序集[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.