富里叶级数在农业自然条件模拟研究中的应用

齐艳红

摘　要

本文通过对实测数据的模拟研究，认为富里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}+b_n\sin\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}\right]$$

具有广泛的适用性和高度精确性的特点。此模型在农业自然条件模拟、作物生产力及发育期模拟预测研究中具有重要的应用价值。

一、前　言

自然因素(光、温、水、气、土等)是农业生产的物质基础和影响条件。国内外学者对此进行了许多模拟与预测研究(牛文元，1981)。Cowan(1968)，Lemeur等(1974)分别就不同条件，模拟研究了作物对光能截获与吸收，以及作物顶冠上光能的分布问题。Goudriaan(1977)针对植物和土壤的特性以及大气状况，推导出作物周围的气温和土温动态变化，提出了一套模拟微气候过程的研究方法。Allen(1976)在他的文章中将正弦波方程做了改进，用以计算日度数。这种方法在农业积温的研究中得到广泛应用。马世骏等(1965)对东亚飞蝗的发生规律与预测，运用富里叶级数方法，作了谐波分析。指出飞蝗的数量波动至少由五种周期波叠加而成。马益三(1984)指出了沃尔什级数在暴雨洪水长期预报中的应用价值，同样也说明了谐波分析在研究和识别自然条件周期性方面的实用意义。陈雄山(1980)、邢如楠(1980)也曾应用富里叶级数分析了该模拟方法的精确性与稳定性。总之，自然条件的模拟方法很多，但大多数只适用于一定的范围与目的。有关农业应用的研究仍然很少。鉴于此，本文提出一套实用的、能运用于农业自然条件分析的、具有广泛适用性、高度精确的模拟方法。旨在为这方面的研究提供有效的工具。

二、富里叶级数模拟的基本原理

时间函数f(t)在区间[α，β]上的富里叶级数为：

$$f(t)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}+b_n\sin\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}\right] \quad ①$$

式中：

$$a_0=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\cos\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}dt\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\cos\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}dt\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

若f(t)在$[\alpha,\beta]$区间上满足Dirichlet条件，则级数①收敛于f(t)，且其和在$[\alpha,\beta]$上等于f(t)，此时，可以近似地认为

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{m}\left[a_n\cos\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}+b_n\sin\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}\right]\qquad②$$

其中m为正整数，m愈大，则级数愈逼近于f(t)。

在农业自然条件中，遇到的多数函数均满足绝对可积与Dirichlet条件，此时可用富里叶级数模拟这种关系。设实验或观测数据有L对：

$$(t_i,\ f_i)\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots L)$$

时间t与状态f存在②式的函数关系：

$$f(t;a_0,a_n,b_n\mid n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ m)=f(t)\qquad③$$

对上述模型拟合，即为求参数a_0，a_n，b_n($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots m$)，并使函数模拟数据与实测数据的离差平方和有最小值：

$$S=\sum_{i=1}^{L}[f_i-f(t_i;a_0,\ a_n,\ b_n|n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)]^2\qquad④$$

对于方程④可用几种方法求解：

(1)最小二乘法：根据最小二乘原理，使④式中S最小，必须有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial a_0}=0\\ \dfrac{\partial s}{\partial a_1}=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial s}{\partial a_m}=0\\ \dfrac{\partial s}{\partial b_1}=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial s}{\partial b_m}=0\end{cases}\qquad⑤$$

对⑤式求解可得参数a_0，a_n，b_n($n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots,\ m$)的最小二乘解。

(2)非线性规划法：以④式中的S作为目标函数，用非线性规划法求

$$S_m = \min S \quad ⑥$$

使S达最小值S_m的各参数值即为待估参数值。

三、模拟结果及讨论

以农业自然条件中带有普遍意义的光辐射量(卡/cm^2·日)和气温(℃)为模拟对象。所用资料来自陕西省气象台1987年5月上旬至8月下旬的观测记录。

本文以④式中的S作为目标函数运用非线性规划的单纯形法求解模型参数。取光辐射量及气温的旬平均值作为实测$f_1(t)$。令$\alpha = 5.5$，$\beta = 117.5$；取m = 5，求得各参数

(1)光辐射量模型④的各参数：

$a_0 = 16.3016357$

$a_1 = 0.0999406$	$b_1 = 2.0162125$
$a_2 = -0.8220606$	$b_2 = -0.2125375$
$a_3 = -0.1690211$	$b_3 = -1.7465267$
$a_4 = 0.0179096$	$b_4 = -1.1324654$
$a_5 = -2.2347527$	$b_5 = -0.3075962$

离差平方和 $S_m = 0.9647347$

(2)气温模型④的各参数值：

$a_0 = 23.783966$

$a_1 = 1.671634$	$b_1 = 2.481899$
$a_2 = -0.313685$	$b_2 = -1.051520$
$a_3 = -0.135581$	$b_3 = -0.529683$
$a_4 = -0.468373$	$b_4 = -1.003667$
$a_5 = 0.490555$	$b_5 = -0.270979$

离差平方和 $S_m = 11.722387$

对拟合结果进行卡方检验，光辐射模拟卡方为0.054194；气温模拟，卡方为0.558816，远小于$x^2_{0.05(12)} = 21.026$，说明拟合结果极佳。

由所得结果(表1)可以看出，当取适当的项数m，富里叶级数可以达到完全精确的模拟。若能获得光照、气温的中长期预报值，则可利用此级数的模拟值作为输入，预测作物发育及产量。以发育期预报为例，根据有效积温法则令

$$D_n = D_{n-1} + \frac{1}{A}\left[\int_0^{N_n} f(t)dt - B\right] \quad ⑦$$

其中：D_n是第n个发育时期的终止日(天)，D_{n-1}是第n－1个发育时期终止日，A是作物发育起点温度，B是第n个发育时期所需有效积温(日度)，f(t)为气温函数，N_n是第n个发育期的实际天数，则可利用递推方程⑦预报作物的发育期。例如，已知中熟陆地棉各发育时期的有效积温(华中农学院黄冈分院，1978)；播种至出苗为67日度，出苗至现蕾为505日度，现蕾至开花为495日度，开花至吐絮为792日度。取A = 12℃，利用⑦式模拟棉花(陕—401)的发育进程，结果如表2所示。由表2的结果可见该模型能较

表1 实测值与模拟值比较

项目 时间(天)	光 辐 射(卡/cm²·日)		气 温(℃)	
	实 测	模 拟	实 测	模 拟
5.5	18.496	17.801	18.57	20.98
15.5	13.406	13.408	20.57	20.54
25.5	16.895	16.890	20.43	20.43
36.5	11.577	11.576	21.45	21.42
46.5	16.863	16.859	24.27	24.30
56.5	17.401	17.403	26.34	26.35
66.5	13.041	13.042	23.43	23.47
76.5	18.465	18.464	26.23	26.22
86.5	19.468	19.471	27.42	27.43
97.5	19.809	19.808	25.23	25.21
107.5	14.035	14.033	25.43	25.41
111.5	17.107	17.801	23.41	21.98

好地描述棉花各发育期的起止日期。若将发育时期划分更细，而且能精确地确定出各发育期的有效积温，则可利用模型④与⑦式细致地预测作物的发育进程。

表2 棉花发育时期的模拟值与观测值比较（杨陵，1986）

生 育 期	播种—出苗	出苗—现蕾	现蕾—开花	开花—吐絮
模拟值(日/月)	20/4—6/5	6/5—28/6	28/6—4/8	4/8—
观测值(日/月)	20/4—10/5	10/5—30/6	30/6—8/8	8/8—

同样，在作物生长模拟研究中，经常需要耦合光辐射量与气温的动态模型，富里叶级数模拟为此提供了有效的工具。富里叶级数有很好的收敛性，在无约束极值方法的求解过程中，模拟效果与初始点的选择关系不大，可以保证求得的模型参数最优。

富里叶级数量是三角函数系的一种级数，它的动态方程之解，可以描述在限定区间〔α，β〕内的任意复杂的时间函数或具有时序特征的其他函数。模拟的复杂程度，取决于m值的大小。这是本文论述的主要依据。因此，对于这类周期性函数来说，这种模拟仅在限定的区间内是有效的，不能外延。若要外延，必须给定新区间〔α'，β'〕，重新运算。由于富里叶级数是一种周期性函数，它的参数值表达了周期规律的特征，因而可以分析此时函数具有怎样的谐波。如果掌握了其谐波规律，当时间区间有周而复始的循环时，则本模型又可认为是可外延和可预测的。

〔致谢〕本文承蒙汪世泽先生、卢宗凡先生指导，谨此致谢。

参 考 文 献

〔1〕 牛文元编著，《农业自然条件分析》，农业出版社，1981。
〔2〕 陈雄山，用二维Fourier级数展开的涡度方程截断数值试验，《大气科学》，1980，4(3)：271—275。
〔3〕 马世骏等，东亚飞蝗中长期数量预测研究，《昆虫学报》，1965，14(4)：319—338。
〔4〕 邢如楠，用快速富里叶变换的涡度方程(球函数)谱模式，《大气科学》，1980，4(3)：262—270。
〔5〕 马益三，沃尔什函数在暴雨洪水长期天气预报分析中的初步应用，《大气科学》，1984，8(3)：332—331。
〔6〕 Goudriaan，J.(王正非等译)，《作物微气象学：模拟研究》，科学出版社，1985。
〔7〕 华中农学院黄冈分院，棉花积温初步研究，《湖北农业科学》，1978，5：12—15，6：6—8。
〔8〕 Allen，J.C.，A modified Sine wave method for calculating degree days，Environ.Entomol. 1976，5：388—396。
〔9〕 Cowan，I. R.，The interception and absorption of radaition in plant stands，J. appl. Ecol. 1968，5：367—379。
〔10〕 Lemeur，R.and Blad，B.L.，A critical review of light models for estimating the short-wave radiation regiem of plant canopies，Agric.Met.1974，14：255—286。

Application of Fourier Series in Simulating the Natural and Rural Conditions

Qi Yanhong

Abstract

By simulating the real data obtained from observation, the Fourier series is considered to be possessed of extensive suitabilities and precision for simulation. This model may be used to simulate the natural factors, such as the irradiation of sun, the climatic variation, the output of crop and the growing stage of plant. The Fourier series is shown as below:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n\cos\frac{n\pi(2t-d-\beta)}{\beta-a}+b_n\sin\frac{n\pi(2t-a-\beta)}{\beta-a}\right)$$

本期校对 帅启富 插图清绘 贾新美